

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ

1. Α. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ):

i. $(x - y)(-x + y) = x^2 - y^2$

ii. $(-x - 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

- Β. Συμπληρώστε τα κενά:

i. $(\dots - \dots)^2 = 9x^2 \dots 6xy \dots \dots$

ii. $(x - 3)^3 = \dots$

- Γ. Παραγοντοποιείτε πλήρως τις ακόλουθες παραστάσεις:

i. $x^2y - x^2 - xy + x + y - 1 =$

ii. $16x^2 + 40xy + 25y^2 =$

iii. $16y^2 - 9(x + y)^2 =$

iv. $2x^2 - 3x + 1 =$

2. Α. Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τις ακόλουθες παραστάσεις:

i. $4\alpha^2\beta - \frac{\beta^3}{9}$

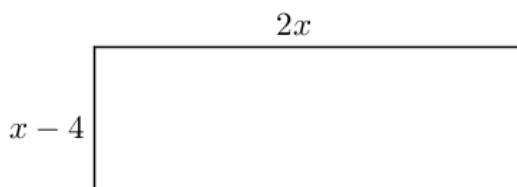
ii. $5\alpha^v - 20\alpha^{v+1}\beta + 20\alpha^{v+2}\beta^2, v \in \mathbb{N}$

iii. $3x(1 - y)^2 - 6x^2(y - 1)^2 - 3x(1 - y)$

Β. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$ και $\beta = \frac{2}{3-\sqrt{5}}$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\alpha + \beta$.

3. Η επιφάνεια ενός χαλιού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι διαστάσεις του σε μέτρα είναι:



- i. Γράψτε μια έκφραση για το εμβαδόν Α, σε m^2 , του χαλιού.

Αν το εμβαδόν του χαλιού είναι $10m^2$, τότε

- ii. Να υπολογίσετε την τιμή του x .

- iii. Δώστε την τιμή του μήκους και του πλάτους του χαλιού, σε μέτρα.

4. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + 5x - 1 = 0$.

i. Δείξτε ότι έχει δύο πραγματικές, διαφορετικές, ρίζες, x_1, x_2 .

ii. Υπολογίστε τις ακόλουθες παραστάσεις: $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

iii. Κατασκευάστε μια δευτεροβάθμια εξίσωση τέτοια ώστε οι ρίζες της να είναι:

$$r_1 = \frac{1}{x_1} \text{ και } r_2 = \frac{1}{x_2}.$$

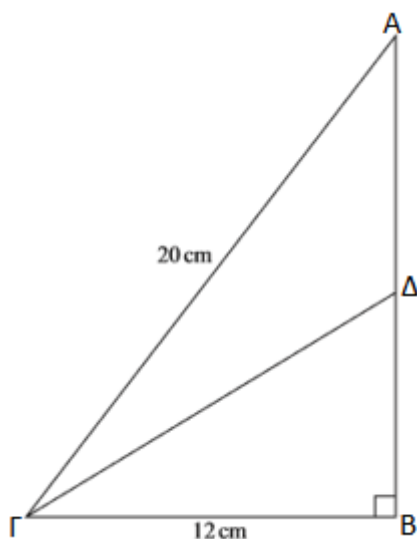
5. Στο τρίγωνο ABΓ δίνονται οι πλευρές ΑΓ=20cm, ΒΓ=12 και η γωνία $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ$.

I. Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

Δίνεται το σημείο Δ της πλευράς ΑΒ τέτοιο ώστε $\varepsilon\varphi(\hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{B}) = 0,6$.

II. Να βρείτε το μήκος της ΔΒ.

III. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΔ.



6. 1. Να λύσετε την παρακάτω ανίσωση και να γράψετε τις λύσεις της σε μορφή διαστήματος Δ.

$$\frac{|2x - 1|}{3} - 1 < \frac{3 - |1 - 2x|}{4}$$

2. Αν $x \in \Delta$, να δείξετε ότι η ακόλουθη παράσταση Α είναι σταθερός αριθμός (δηλαδή ανεξάρτητη του x), όπου:

$$A = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x + 1} + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$$

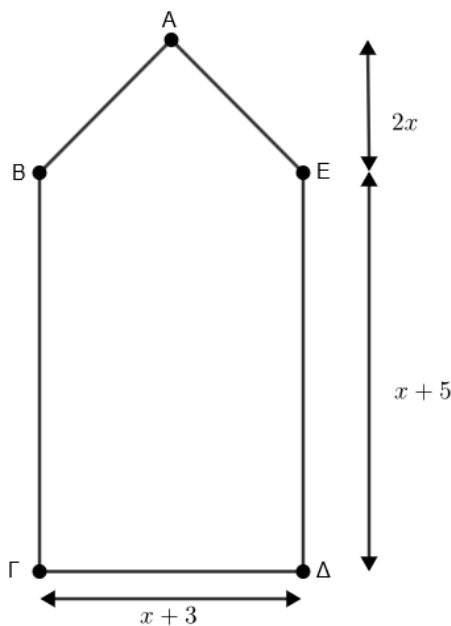
7. Η βάση ενός ηλεκτρικού σίδηρου έχει σχήμα πενταγώνου ΑΒΓΔΕ, όπου το ΒΓΔΕ είναι παραλληλόγραμμο με πλευρές $(x + 3)\text{cm}$ και $(x + 5)\text{cm}$ και το ΑΒΕ είναι ισοσκελές τρίγωνο ($AB=AE$) με ύψος $2x\text{ cm}$. Το εμβαδόν του ΑΒΓΔΕ είναι 21 cm^2 .

IV. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔΕ συναρτήσει του x .

V. Να δείξετε ότι $2x^2 + 11x - 6 = 0$.

VI. Να βρείτε το μήκος του ΓΔ.

VII. Να βρείτε προσεγγιστικά τη γωνία $B\hat{A}E$.



Γωνία	ημ	συν	εφ	Γωνία	ημ	συν	εφ
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,036
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,072
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,111
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,150
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,192
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,235
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,280
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,376
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,428
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,483
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,540
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,600
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,664
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,732
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,881
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,963
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,050
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,145
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,356
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,475
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,605
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,747
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,904
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,078
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,271
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,487
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2586	3,732
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,011
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,332
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,705
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,145
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,671
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,314
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,115
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,144
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,514
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,43
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,30
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,08
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,64
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1,0000	90°	1,0000	0	

8. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \neq 0$

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \neq 0$.

2. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

3. Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4. Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1.

9. 1. Να χαρακτηρίσετε, χωρίς να αιτιολογήσετε, τις παρακάτω προτάσεις, ως σωστές (Σ) ή ως λάθος (Λ).

i. Αν $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha^2 \beta} = \alpha \sqrt{\beta}$.

ii. Για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha + \beta$.

iii. Αν $\alpha \geq 0$, μπορούμε πάντα να γράφουμε $\sqrt[6]{\alpha^3} = \sqrt{\alpha}$.

(Μονάδες 6)

2. Να επιλέξετε, χωρίς να αιτιολογήσετε, τη σωστή απάντηση:

i. Από την ισότητα $|x| + |y| = 0$ προκύπτει ότι:

1. $x > 0$ και $y > 0$
2. $|x|$ και $|y|$ είναι αντίθετοι αριθμοί
3. $x = 0$ και $y = 0$
4. $x > 0$ και $y < 0$.

ii. Αν $x < 0$ και $y > 0$ τότε

1. $|x| + |y| = x + y$
2. $|x| + |y| \geq |x + y|$
3. $|x| - |y| = -x - y$
4. $|y| - |x| = |x - y|$

iii. Αν ισχύει η σχέση $|2 - x| = -x + 2$, τότε

1. $x \geq 2$
2. $x \geq 0$
3. $x \leq 2$
4. $0 \leq x \leq 2$

3. Να δείξετε ότι η τιμή της παρακάτω παράστασης είναι ανεξάρτητη του $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^n - 4^{n-1})^3}$$

10. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνονται τα σημεία

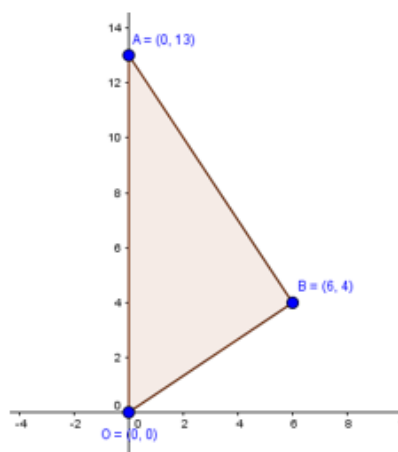
O (0, 0), A (0, 13) και B (6, 4).

I. Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των σημείων A και B.

II. Το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

III. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AOB.



11. Η εξίσωση $2x^2 + x + c = 0$, όπου $c \in \mathbb{R}$, έχει δύο πραγματικές διαφορετικές ρίζες r_1, r_2 .

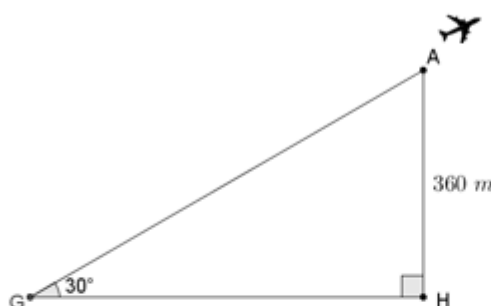
I. Δώστε το άθροισμα, S , και το γινόμενο, P , των ριζών αυτών.

II. Αν επιπλέον ισχύει ότι $r_2 = \frac{r_1^2}{2}$, να δείξετε ότι $r_1 = -1$, $r_2 = \frac{1}{2}$.

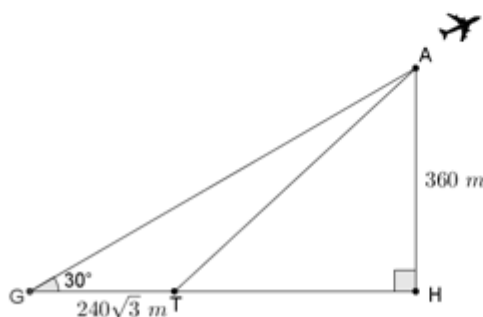
III. Να βρείτε την τιμή του $c \in \mathbb{R}$.

IV. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $2x^2 + x - 1$.

12. Ο Θάνος είναι στο αεροδρόμιο του Βερολίνου και παρακολουθεί τα αεροπλάνα που καθώς απογειώνονται. Συγκεκριμένα, παρατηρεί ένα αεροπλάνο που βρίσκεται σε γωνία 30° από το σημείο G που εκείνος στέκεται. Το αεροπλάνο βρίσκεται σε ύψος 360 μέτρων. Τα δεδομένα φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.
- a. Υπολογίστε την οριζόντια απόσταση, GH , του αεροπλάνου από το Θάνο.



Το αεροπλάνο απογειώθηκε από το σημείο T , το οποίο είναι $240\sqrt{3}$ μέτρα από εκεί που στέκεται ο Θάνος, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



b. Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας στο ερώτημα (a), υπολογίστε τη γωνία ATH , δηλαδή τη γωνία απογείωσης του αεροπλάνου.

13. A. Για τις ακόλουθες ερωτήσεις, επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

I. Αν $a + b = 5$ και $a^2 - b^2 = 30$, η τιμή του $a - b$ είναι:

A.-5 B.-6 C.8 D.6

II. Αν $(a + b)^2 = 36$ και $a^2 + b^2 = 68$, η τιμή του ab είναι:

A.-32 B.12 C.-16 D.-18

B. Να απλοποιήσετε την ακόλουθη παράσταση:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 4x - 20}{3x^2 - 75} : \frac{x^2 + 4}{x^2 + 10x + 25}$$

14.

A1. a. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις: $A = x^2 - 10x + 25$
και $B = 25 - x^2$.

b. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\Gamma = \frac{(x^2-10x+25)^{2021}(x+5)^{2021}}{(5-x)^{2021}(25-x^2)^{2021}}$

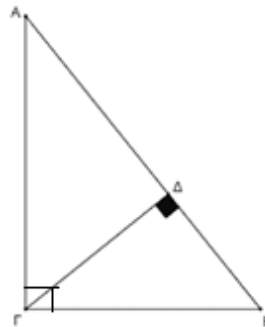
A2. Στις επόμενες ερωτήσεις επιλέξτε τη σωστή απάντηση

a. Αν $x < 2$, τότε η παράσταση $A = |2x - 4| + 3$ απλοποιείται ως

- i. $A = 2x - 1$
- ii. $A = 1 - 2x$
- iii. $A = 2x + 7$
- iv. $A = 7 - 2x$

b. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ του διπλανού σχήματος ισχύει:

- i. $\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{AB}$
- ii. $\eta\mu A = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$
- iii. $\sigma\upsilon\nu A = \frac{A\Gamma}{AB}$
- iv. $\sigma\upsilon\nu A = \frac{B\Gamma}{AB}$



15.

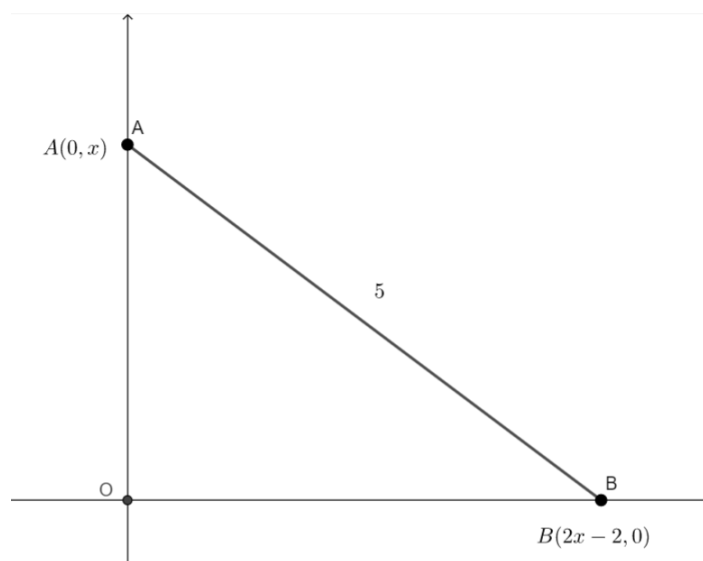
Έστω $A = \frac{x^2-16}{x^2-4x}$.

Γ1. Για ποιες τιμές x ορίζεται η παράσταση A ;

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $|A| = 2$.

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $A \leq 2$.

16.



B1. Να δείξετε ότι $5x^2 - 8x - 21 = 0$

B2. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AOB.

B3. Να βρείτε το ύψος του τριγώνου AOB που αντιστοιχεί στην πλευρά AB.

B4. Αν η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι $-0,75$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας αυτής στη μορφή $y = \alpha x + \beta$.

17.

Δίνεται η εξίσωση $|a - 2|x^2 + |1 - 2a|x + |2 - a| = 0$ με $a \neq 1$. Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες.

Δ1. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του α .

Δ2. Να δείξετε ότι οι ρίζες είναι αρνητικοί αριθμοί και αντίστροφοι.

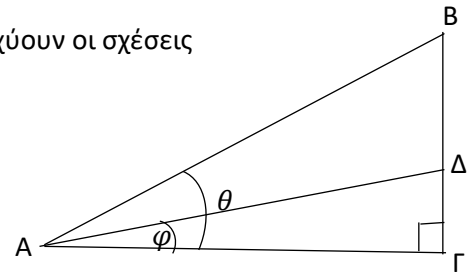
Δ3. Αν η μια ρίζα (ρ_1) είναι τετραπλάσια της άλλης ρίζας (ρ_2), βρείτε τις δύο ρίζες.

18.

A1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος. Σημειώστε στην κόλλα σας ένα Σ ή ένα Λ αν η πρόταση είναι σωστή η λανθασμένη αντίστοιχα (χωρίς να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$) του διπλανού σχήματος ισχύουν οι σχέσεις

- a. $\varepsilon\varphi\theta > \varepsilon\varphi\varphi$
- b. $A\Gamma^2 = A\Delta^2 - \Delta\Gamma^2$
- c. $\sigma\upsilon\nu\theta > \sigma\upsilon\nu\varphi$
- d. $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2$
- e. $\varepsilon\varphi(\theta - \varphi) = \frac{B\Delta}{A\Delta}$



A2. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 25\alpha^2 + 20\alpha\beta + 4\beta^2 \quad \text{και} \quad B = 9\gamma^2 - 3\gamma\delta + \frac{\delta^2}{4},$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ πραγματικοί αριθμοί.

- a. Να παραγοντοποιήσετε πλήρως την παράσταση: $A - B$
- b. Να βρείτε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιούν τα α, β και τη σχέση που πρέπει να ικανοποιούν τα γ, δ ώστε $A + B = 0$.

19.

Ο Γιάννης πληρώνει 8,75€ για ένα εισιτήριο στο σινεμά. Αν αγοράσει x εισιτήρια σε ένα χρόνο θα πληρώσει συνολικά y ευρώ όπου $y = 8,75x$.

Την περασμένη χρονιά ο Γιάννης ξόδεψε λιγότερα από 88€.

B1. Να βρείτε το μέγιστο αριθμό εισιτηρίων που αγόρασε ο Γιάννης την περασμένη χρονιά.

Η Μαρία αγοράζει κάθε χρόνο για το σινεμά ένα ετήσιο εκπτωτικό κουπόνι αξίας 50€ με το οποίο στη συνέχεια πληρώνει 2,50€ για κάθε εισιτήριο.

B2. Να εκφράσετε το **συνολικό** ποσό t που ξοδεύει η Μαρία για σινεμά σε ένα χρόνο αν αγοράζει x εισιτήρια.

Κατά την περσινή χρονιά, ο Γιάννης και η Μαρία αγόρασαν τον ίδιο αριθμό εισιτηρίων και πλήρωσαν συνολικά τα ίδια χρήματα.

B3. Να βρείτε τον αριθμό εισιτηρίων που αγόρασε ο Γιάννης την περασμένη χρονιά.

20.

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{(\sqrt{2} - 5)^2} - \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2}$ και $\beta = \sqrt{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

Γ1. Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β .

Γ2. Δίνεται ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 2$. Αν $\alpha < x < 2\beta$, να αποδείξετε ότι

a. $|x - \alpha| + |x - 2\beta| = 1$

b. $x^3 - 2\beta x^2 < 3\alpha x - 6\alpha\beta$

21.

Δίνεται το τριώνυμο: $4x^2 - 4\lambda x + 4\lambda - 3$, με λ πραγματικό.

Δ1. Αποδείξτε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 16(\lambda - 1)(\lambda - 3)$.

Δ2. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε το τριώνυμο να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Δ3. Αν $\lambda = 2.9$ να λύσετε την ανίσωση: $4x^2 - 4\lambda x + 4\lambda - 3 < 0$

Δ4. Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2 , να βρείτε την τιμή του λ , αν $S + P = \frac{29}{4}$

(όπου S το άθροισμα και P το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου).

Δ5. Αν $\lambda = 4$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $|x_1 + 1||x_2 + 1|$,

χωρίς να υπολογίσετε τις ρίζες του τριωνύμου.

22.

A1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος. Σημειώστε στην κόλλα σας ένα Σ ή ένα Λ αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη αντίστοιχα (χωρίς να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

f. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

g. Αν $\alpha < 0$, τότε $|\alpha| < 0$.

h. Αν $|x| \leq 5$ τότε $x \leq 5$ ή $x \leq -5$.

i. Για κάθε $x \geq 0$, πραγματικό αριθμό ισχύει ότι $\sqrt{(-x)^2} = x$

j. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $(-\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2$

A2. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση

a. Αν $|x| > 5$ τότε ισχύει

A. $x = 5$

B. $x \in (-5, 5)$

Γ. $x = -5$

Δ. $x \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$

b. Η παράσταση $\sqrt{5} + \sqrt{5}$ ισούται με

- A. $\sqrt{10}$ Γ. $\sqrt{5}$
B. 5 Δ. $\sqrt{20}$

c. Αν $3 < x < 4$, τότε η παράσταση $\frac{|x-4|}{x-4} + \frac{|x-3|}{x-3}$ ισούται με

- A. 2 Γ. 0
B. 1 Δ. -2

d. Η παράσταση $\sqrt{\sqrt{2}-1} \sqrt{1+\sqrt{2}} \sqrt{2}$ ισούται με

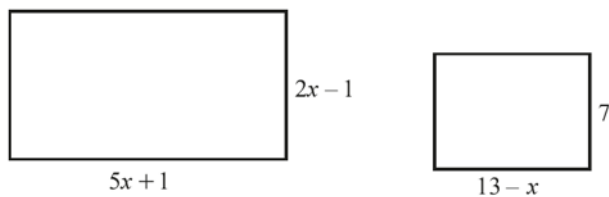
- A. $\sqrt{2}$ Γ. $\sqrt{8}$
B. 1 Δ. 2

A3. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$\frac{5x - 2x^2 - 3}{6x^3 - 6x}$$

23.

(Στην άσκηση αυτή όλα τα μήκη είναι σε cm. Δίνεται $\sqrt{1764} = 42$)



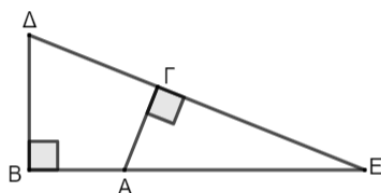
Το εμβαδόν του μεγαλύτερου ορθογωνίου είναι 84cm^2 μεγαλύτερο από το εμβαδόν του μικρότερου ορθογωνίου.

B1. Δείξτε ότι $5x^2 + 2x - 88 = 0$.

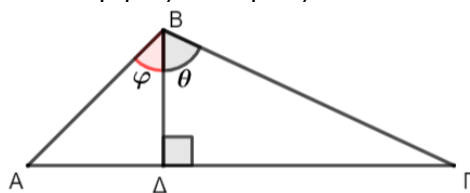
B2. Να βρείτε το εμβαδόν του μικρότερου ορθογωνίου.

24.

Γ1. Στο διπλανό σχήμα είναι: $EA = 10\text{cm}$, $EB = 12\text{cm}$ και $EG = 8\text{cm}$. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις ED , AG και BD .



Γ2. Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $AG = 9\text{cm}$, $\varepsilon\varphi\theta = 1,2$ και $\varepsilon\varphi\varphi = 1,8$. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $B\Delta$.



25.

Δίνεται η εξίσωση $(8 - \lambda)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 1 = 0$, με λ πραγματικό αριθμό.

Δ1. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 8$.

Δ2. Για $\lambda \neq 8$, δείξτε ότι η Διακρίνουσα είναι $4\lambda^2 - 12\lambda - 16$.

Δ3. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση είναι αδύνατη;

Δ4. Για τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 πραγματικές και άνισες, να αποδείξετε ότι: $x_1 + x_2 + 12x_1x_2 = 1 + 3\lambda x_1x_2$

26.

A1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος. Σημειώστε στην κόλλα σας ένα Σ ή ένα Λ αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη αντίστοιχα (χωρίς να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

k. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $d(x, -3) = |x + 3|$.

l. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $|x - y| \leq |x| - |y|$.

m. Η παράσταση $\sqrt{-x}$ δεν ορίζεται για καμία πραγματική τιμή του x .

n. Η ανίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda^2 > 0$ με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

o. Οι ανισώσεις $x^2(x - 1) \geq 0$ και $x - 1 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

A2. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση

e. Ο αριθμός $\sqrt{(9 - \sqrt{7})^2}$ είναι ίσος με

A. $9 - \sqrt{7}$ Γ. $\sqrt{7} - 9$

B. 2 Δ. $9 + \sqrt{5}$

f. Η σχέση $|x - 2| \leq 3$ γράφεται ισοδύναμα ως διάστημα ή ένωση διαστημάτων ως εξής:

A. $x \in (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$ Γ. $x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

B. $x \in [-1, 5]$ Δ. $x \in [-2, 3]$

g. Αν $x < y < w$, τότε η παράσταση $|w - y| + |y - x| - |x - w|$ ισούται με

A. $2w - 2x$ B. 0 Γ. $2y - 2x$ Δ. $2y - 2w$

h. Αν η ανίσωση $x^2 - 2x + \gamma > 0$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , τότε:

A. $\gamma < 1$ Γ. $\gamma = 1$

B. $\gamma \leq 1$ Δ. $\gamma > 1$

i. Η εξίσωση $|x - 1| = x - 1$

A. είναι αδύνατη

Γ. Έχει μοναδική λύση την $x = 1$

B. Ισχύει για κάθε $x < 1$

Δ. Ισχύει για κάθε $x \geq 1$

27

Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{\alpha(\alpha - 1)^2 + \beta^2\alpha + \beta(1 - \alpha)^2 + \beta^3}{\alpha + \beta}$$

όπου α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq -\beta$.

B1. Να δείξετε ότι η παράσταση A απλοποιείται ως $A = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1$.

B2. Να αποδείξετε ότι $A \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό α, β . Πότε ισχύει η ισότητα;

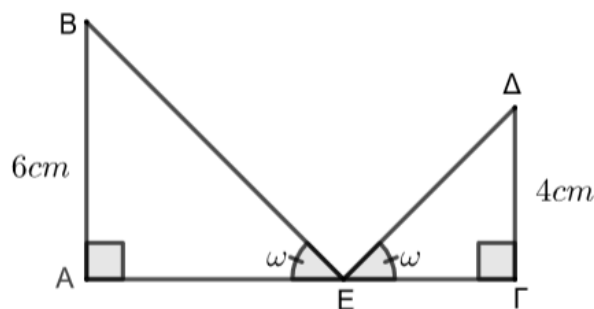
B3. Τα παραπάνω α και β είναι αντίστοιχα το πλάτος και το μήκος ενός ορθογωνίου τα οποία ικανοποιούν τις ανισότητες $2 < \alpha < 3$ και $3 < \beta < 5$. Αν ελαττώσουμε το πλάτος κατά 1 μονάδα, να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης A .

28.

Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB = 6\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 4\text{cm}$ και $A\Gamma = 10\text{cm}$.

Γ1. Να υπολογίσετε τα τμήματα AE και $E\Gamma$.

Γ2. Να βρεθεί το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $B\Delta$.



29.

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + k = 0$, με ρίζες x_1 και x_2 για τις οποίες ισχύει ότι

$$2x_1 + 5x_2 = 18$$

Δ1. Να βρείτε το άθροισμα των ριζών, S , και να εκφράσετε το γινόμενο τους, P , συναρτήσει του k .

Δ2. Να δείξετε ότι $x_2 = 2$.

Δ3. Να βρείτε την τιμή της ρίζας x_1 και του k .

Δ4. Για $k = 8$ και x_1, x_2 τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης, να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού μ ώστε η ανίσωση

$$(\mu - 4)x^2 - \frac{2x_1 + 5x_2}{3}x + \mu < -\frac{k}{2}$$

να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

30.

Αν γνωρίζουμε ότι $-3 < x < -\frac{1}{2}$

B1. Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \frac{-2\sqrt{x^2 + 6x + 9} + 6x}{\sqrt{4x^2 + 4x + 1} + 4}$$

B2. Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης

$$B = \frac{12}{\sqrt{\sqrt{10} - 1} \cdot \sqrt{\sqrt{10} + 1}}$$

B3. Αν $A = -2$ και $B = 4$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Gamma = |2x + A| - |2x - B|$ είναι ανεξάρτητη του x .

31.

Γ1. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: (\lambda + \mu)x + y = 7$ και $\varepsilon_2: x + (\lambda + 3\mu)y = 1$ τέμνονται στο σημείο $A(2,1)$, να υπολογίσετε τις τιμές των λ και μ .

Γ2. Ένας αρχιτέκτονας τροποποιεί το σχήμα ενός παραλληλογράμμου για να διατηρήσει το ίδιο εμβαδόν. Η βάση του παραλληλογράμμου αυξάνεται κατά 25%, ενώ το αντίστοιχο ύψος του μειώνεται κατά $x\%$. Αν το εμβαδόν του παραλληλογράμμου παραμένει αμετάβλητο, να βρεθεί η τιμή του x .

32.

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 2(\mu + 3)x + \mu^2 + 6\mu - 5 = 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντα δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης. Χωρίς να βρείτε τις ρίζες

Δ2. να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 x_2$ των ριζών συναρτήσει της παραμέτρου μ .

Δ3. να εκφράσετε την παράσταση $x_1^2 + x_2^2$ συναρτήσει της παραμέτρου μ

Δ4. να αποδείξετε ότι η διαφορά $x_1 - x_2$ δεν εξαρτάται από την παράμετρο μ .